

$$\left[\begin{array}{ccc|cc} \hline & & & 1 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 1 & 0 \\ 0 & & & 0 & 1 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right] \quad \begin{array}{c} A \\ B \end{array}$$

systems incompatible

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ & & & 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \right] \quad \begin{array}{c} A \\ B \end{array}$$

$$I \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} x_{j_1} \\ \vdots \\ x_{j_{n-k}} \end{bmatrix} + B$$

∞_{n-k}

Sol. particolare $I \begin{bmatrix} x_{i_1} \\ \vdots \\ x_{i_k} \end{bmatrix} = B$

Sistemi principale equivalente

$$AX = B$$

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ \boxed{M} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$A \qquad X \qquad B$

$$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$$

M minore di A
 con $\text{rk}(M) = \text{rk}(A) = k$
 $\det(M) \neq 0$.

$$\text{equiv. a } A'X = B'$$

ove A' = matrice ottenuta da A

prendendo solo le righe
 che contengono M

B' = matrice ottenuta da B
 prendendo solo le righe che
 contengono M

oss: Le resis dei riskeu lineari
funzioni su di un campo qualsiasi

$\mathbb{K}$

$\mathbb{Q}$

∞^1

$\mathbb{R}$

∞^2

$$\begin{cases} 3x + 7y + 5z = 7 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$$

$\mathbb{C}$

∞^3

$\text{rk}(A) = \text{rk}(A|B)$?

$$^A \begin{bmatrix} 1 & -k \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 1 + k^2$$

$$\begin{aligned} x - ky &= 0 \\ kx + y &= 1 \end{aligned}$$

In $\mathbb{R}$, $\det A \neq 0 \forall k \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ il sistema è sempre
di Cramer $\Rightarrow \exists!$ sol.

In $\mathbb{C}$, $x \neq \pm i \Rightarrow$ il sistema è di Cramer $\Rightarrow \exists!$ sol.

$$\begin{array}{c} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ n \end{array} \left[\begin{array}{cc} \vdots & 0 \\ 1 & 1 \end{array} \right] \quad A|B$$

$$\text{rk}(A) = 1 \quad \text{rk}(A|B) = 2$$

$\Rightarrow$ sistema incompatibile.

$$n=2 \rightarrow A \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = B \quad \text{con } A \text{ matrice } m \times 2 \text{ incompatibile}$$

$(A|B)$ matrice compatibile.

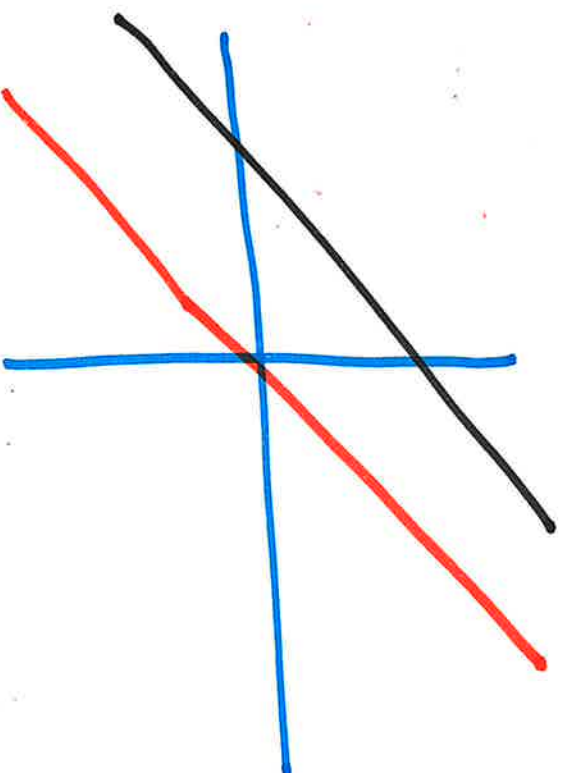
$$0 \leq \text{rk}(A) \leq \text{rk}(A|B) \leq 2$$

$$\begin{array}{c|c|c} \text{rk}(A) & \text{rk}(A|B) & \text{sol.} \\ \hline 0 & 0 & \emptyset \\ 1 & 1 & \mathbb{R}^2 \\ 2 & 2 & \emptyset \end{array} \quad \begin{array}{c} \mathbb{R}^2 \\ \emptyset \\ \text{matr.} \end{array} \quad \begin{array}{c} Ax + By = -C \\ Ax + By + C = 0 \end{array}$$

inf. di 2 matrici non //

Trazado del
Sofospacio

$$ax + by = 0$$



$$ax + by + c = 0$$

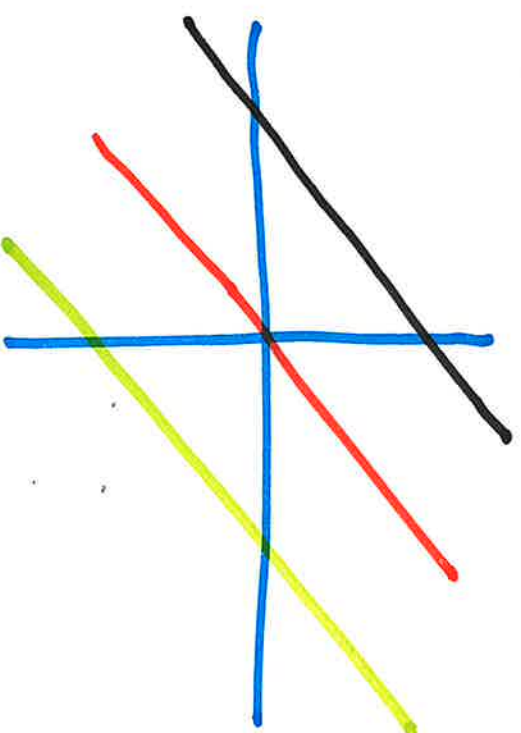
$$a'x + b'y + c' = 0$$

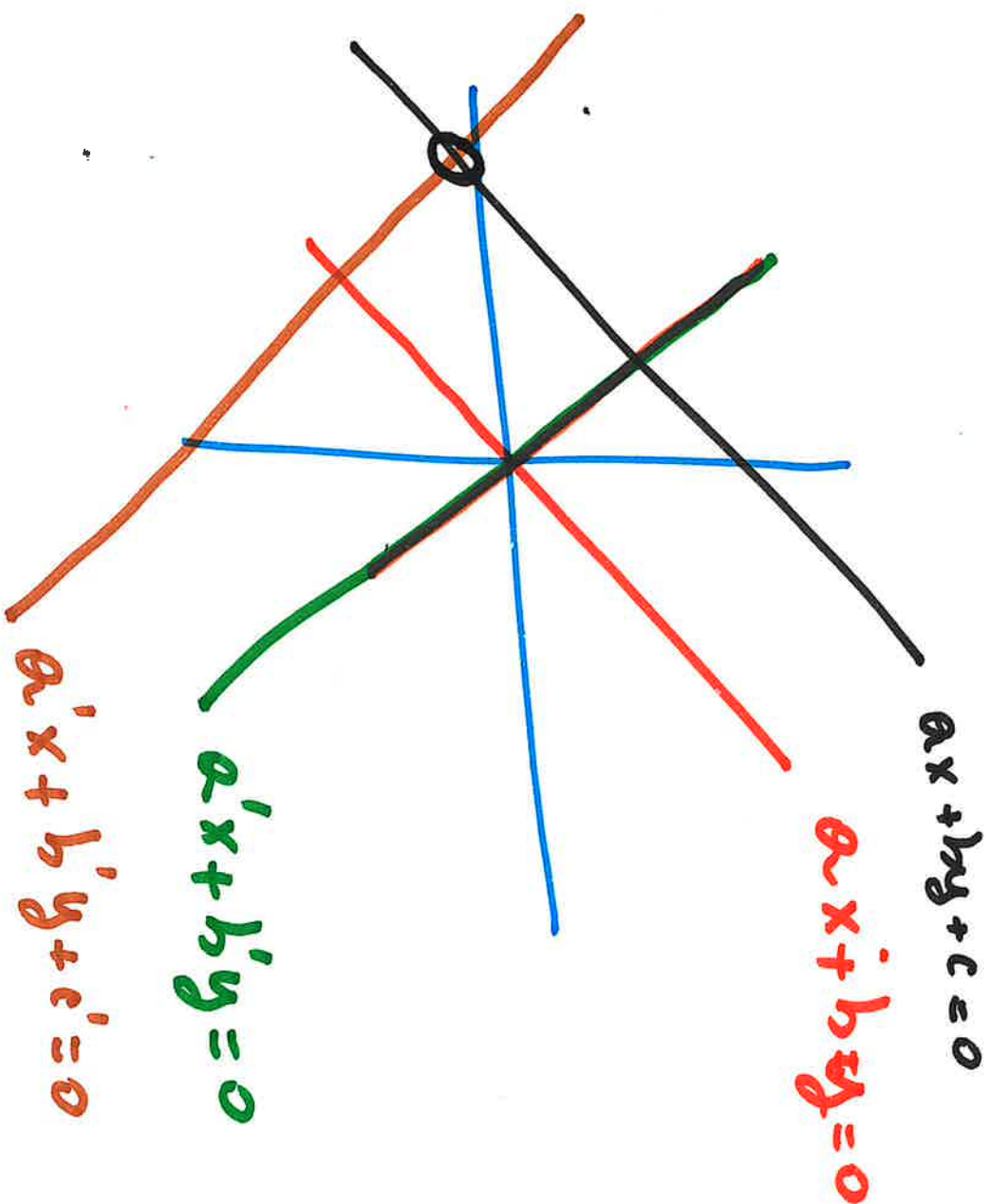
$$n_k \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$$

$$ax + by = 0$$

é eq. 2

$$a'x + b'y = 0$$





Le soluzioni di una equazione lineare

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

con $(a_1 \dots a_n) \neq (0 \dots 0)$

corrispondono ai traslati (secondo un vettore)
dell'iperpiano di equazione

$$a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$$

di $\mathbb{K}^n$.

iperpiano = sottospazio di

$n=1 \Rightarrow$

iperpiano: punto.

dimensione $n-1$

$n=2 \Rightarrow$

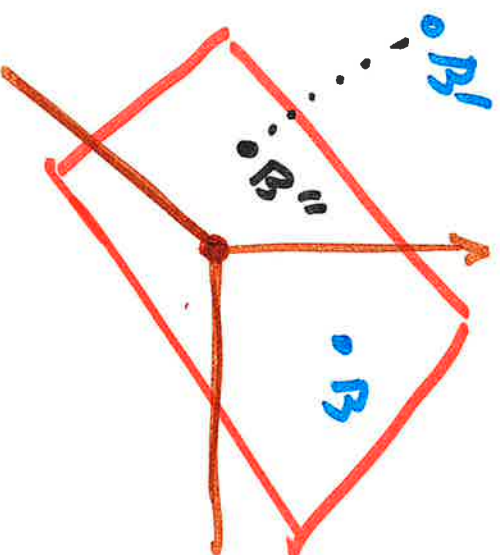
iperpiano: retta

$n=3 \Rightarrow$

iperpiano: piano

$AX = B$ est toujours linéaire.

↓
compatible $\Leftrightarrow B \in \text{Im}(A) \subseteq \mathbb{K}^m$



$AX = B''$
é diverso da
 $AX = B'$

$$(*) \quad a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + a_{22}y^2 + 2a_{23}y + a_{33} = 0$$

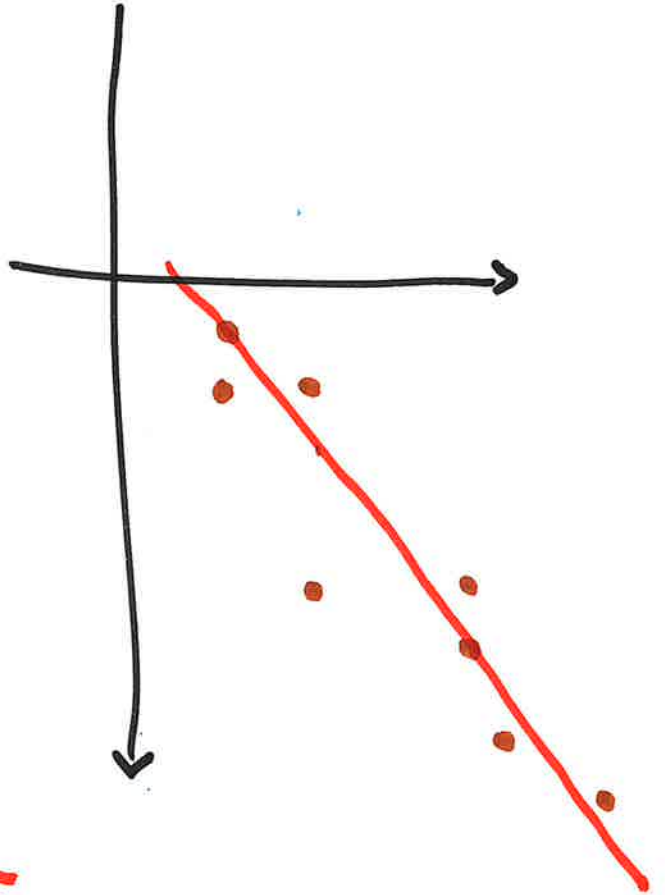
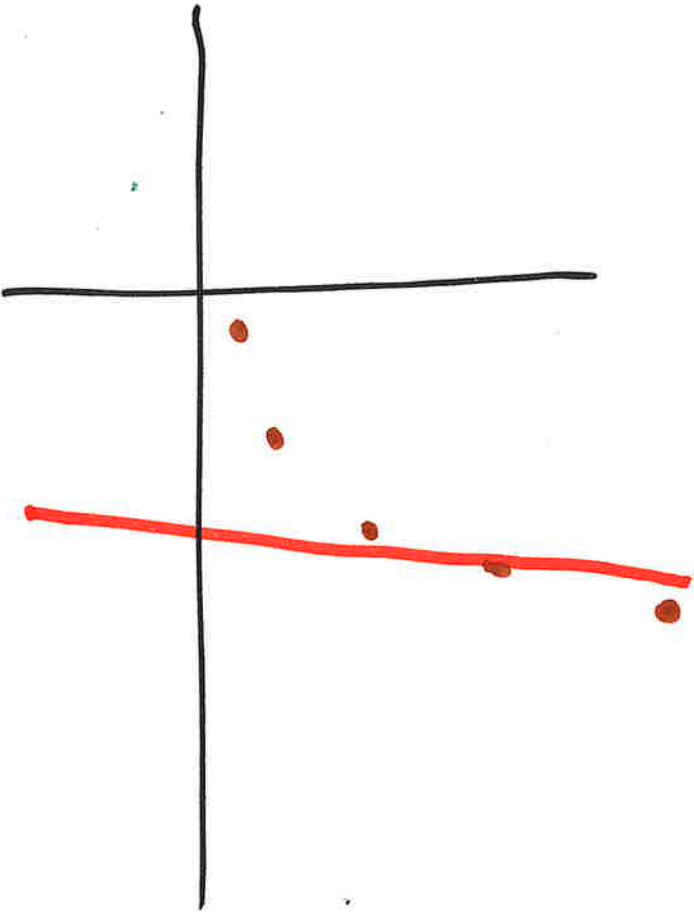
$(x_i, y_i) \in \mathcal{C}$ DATT "SPERIMENTALI"

incognite $a_{11} \dots a_{33}$

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1^2 + \dots + a_{33} = 0 \\ a_{11}x_2^2 + \dots + a_{33} = 0 \\ \vdots \\ a_{11}x_n^2 + \dots + a_{33} = 0 \end{array} \right.$$



6 incognite
omogene.
→ scegliere
un valore
param. e
la porremo $\neq 0$
 $a_{33} \neq 0$
dividiamo eq.
per $a_{33} \rightarrow$
5 incognite
non omogene.



$$y = ax + b$$

Spazi vettoriali euclidei e prodotti scalari.

Def: Sia $V_n(\mathbb{K})$ uno spazio vettoriale di dim n sul campo $\mathbb{K}$.

Una funzione $\beta: V_n \times V_n \rightarrow \mathbb{K}$ è detta

forma bilineare se

$\forall \bar{x} \in V_n(\mathbb{K})$ la funzione $\beta_{\bar{x}}: V_n \rightarrow \mathbb{K}$

è la funzione $\beta_{\bar{x}}: \bar{y} \rightarrow \beta(\bar{y}, \bar{x})$

sono entrambe lineari.

$$\begin{array}{c} \bar{x} \rightarrow \\ \bar{y} \rightarrow \end{array} \boxed{B} \rightarrow \alpha \in K$$

$$\bar{y} \rightarrow \boxed{B_*} \rightarrow \alpha \in K$$

$$\bar{x} \rightarrow \boxed{B_*} \rightarrow \alpha \in K$$

linearmente
due componenti:

Esempio $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\bar{x}' = \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \quad \bar{y}' = \begin{pmatrix} c' \\ d' \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \bullet \det(a\bar{x} + b\bar{y}', \bar{y}) &= \\ &= a \det(\bar{x}, \bar{y}) + b \det(\bar{x}', \bar{y}) \end{aligned}$$

$$\bullet \det(\bar{x}, a\bar{y} + b\bar{y}') = a \det(\bar{x}, \bar{y}) + b \det(\bar{x}, \bar{y}').$$

N.B.: Sia B una base di $V_n(K)$ e siano

$$\bar{x} = \sum_i x_i \bar{e}_i \quad \bar{y} = \sum_j y_j \bar{e}_j$$

$$\text{due vettori } B = (\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n)$$

$$\begin{aligned}
 B(\bar{x}, \bar{y}) &= B\left(\sum_i x_i \bar{e}_i, \sum_j y_j \bar{e}_j\right) = \\
 &= \sum_i x_i B(\bar{e}_i, \sum_j y_j \bar{e}_j) = \\
 &= \sum_{i,j} x_i y_j \boxed{B(\bar{e}_i, \bar{e}_j)}.
 \end{aligned}$$

I valori di B sono universalmente determinati
 dai valori di B assunti sulle coppie
 di vettori di B .

Chiamiamo matrice di B rispetto a B
 la matrice

$$B = \begin{pmatrix} B(\bar{e}_1, \bar{e}_1) & \dots & B(\bar{e}_1, \bar{e}_n) \\ \vdots & & \vdots \\ B(\bar{e}_n, \bar{e}_1) & \dots & B(\bar{e}_n, \bar{e}_n) \end{pmatrix}$$

053:

$$\bar{x}^T B \bar{y} = (x_1 \dots x_n) B \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 \dots x_n) \begin{bmatrix} \sum_j y_j B(\bar{e}_1, \bar{e}_j) \\ \vdots \\ \sum_j y_j B(\bar{e}_n, \bar{e}_j) \end{bmatrix} =$$

$$= \sum_{i,j} x_i y_j B(\bar{e}_i, \bar{e}_j) =$$

$$B(\bar{x}, \bar{y}).$$



Supponiamo $X' = AX$ $Y' = AY$.
e di avere B, B' matrici
della medesima forma bilineare rispetto
due basi B e B' .

$${}^T X' B' Y' = {}^T X B Y \text{ ma}$$

$$X' = AX, \quad Y' = AY$$

$$\Rightarrow {}^T (AX) B' (AY) = {}^T X B Y$$

"

$${}^T X ({}^T A B' A) Y = {}^T X B Y.$$

$$B = {}^T A B' A$$

Def: Si dice prodotto scalare su $V_n(\mathbb{K})$ una forma bilineare simmetrica $\beta: V_n(\mathbb{K}) \times V_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ ome per simmetrica si intende

$$\beta(\bar{x}, \bar{y}) = \beta(\bar{y}, \bar{x}) \quad \forall \bar{x}, \bar{y} \in V_n(\mathbb{K}).$$



Oss: β è bilineare e simmetrica $\Leftrightarrow$ la sua matrice rappresentativa rispetto ad qualsiasi base è simmetrica.

$$B = (B(\bar{e}_i, \bar{e}_j))_{i,j=1}^n$$

$$B(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = B(\bar{e}_j, \bar{e}_i).$$

$$\Rightarrow B = {}^t B$$

our forms bilinear are : alternative no

$$\text{proven } B(\bar{x}, \bar{x}) = 0$$

$$\forall \bar{x} \in V_n(K).$$

$$B(\bar{x}, \bar{y}) = B(\bar{x}, \bar{y}) + B(\bar{x}, \bar{x}) =$$

$$= B(\bar{x}, \bar{y} + \bar{x}) =$$

$$= B(\bar{x}, \bar{y} + \bar{x}) + B(\bar{y} + \bar{x}, \bar{y} + \bar{x}) =$$

$$= B(\bar{y} + \bar{x}, \bar{y} + \bar{x}) - B(\bar{y} + \bar{x}, \bar{y} + \bar{x})$$

$$\begin{aligned}
 &= P_3(\bar{y} + 2\bar{x}, -\bar{x}) = \\
 &= -P_3(\bar{y} + 2\bar{x}, +\bar{x}) + P_3(+\bar{x}, +\bar{x})(-2) = \\
 &= -P_3(\bar{y} + 2\bar{x}, +\bar{x}) = -P_3(\bar{y}, \bar{x}).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_3(\bar{x}, \bar{y}) + P_3(\bar{x}, \bar{x}) &= P_3(\bar{x}, \bar{x} + \bar{y}) + P_3(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = \\
 &= P_3(2\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) - P_3(2\bar{x} + \bar{y}, 2\bar{x} + \bar{y}) = \\
 &= P_3(2\bar{x} + \bar{y}, -\bar{x}) = -P_3(2\bar{x} + \bar{y}, \bar{x}) \\
 &\quad + 2 P_3(\bar{x}, \bar{x}) = \\
 &= -P_3(\bar{y}, \bar{x})
 \end{aligned}$$

$$2P(x, \bar{x}) = P(2\bar{x}, \bar{x}) = P(\bar{x}, 2\bar{x})$$

$$P(\bar{x}, \bar{y}) + P(\bar{y}, \bar{x}) = ?$$

$$\begin{array}{ccc} + & & \downarrow + \\ \downarrow & & \\ P(\bar{y}, \bar{y}) & & P(\bar{x}, \bar{x}) \end{array}$$

$$\downarrow$$

$$P(\bar{x} + \bar{y}, \bar{y}) + P(\bar{y} + \bar{x}, \bar{x}) = P(\bar{x} + \bar{y}, \bar{x} + \bar{y}) = 0$$

Se il rango è $> k \Rightarrow \exists$ almeno un vettore
con $\det(v) \neq 0$

Vettore di M (non $\exists$ un vettore con $\det \neq 0$)
 $\det = 0$

$\Downarrow$

$\text{rango} \leq k$

Assunto è: $\exists$ Vettore $\det = 0$ & $n_k > k$